Universidad Autónoma de Madrid Curso 2020-21

Matemáticas/ Ingeniería Informática-Matemáticas

TEORÍA DE GALOIS

Hoja 3. Extensiones Galois

1. Sean $f(x) = (x^2 - 3)(x^3 + 1) \in \mathbb{Q}[x]$ y $g(x) = (x^2 - 2x - 2)(x^2 + 1) \in \mathbb{Q}[x]$. Demuestra que $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, i)$ es cuerpo de descomposición de f y g sobre $\mathbb{Q}$.

2. Demuestra que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$ es un cuerpo de descomposición de $x^2 - 2\sqrt{2}x + 3$ sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

3. Construye cuerpos de descomposición sobre $\mathbb{Q}$ de los polinomios $x^3 - 1$, $x^4 + 5x^2 + 5$ y $x^6 - 8$ y calcula el grado de la extensión correspondiente.

4. Demuestra que $K = \mathbb{F}_2[y]/(y^3 + y + 1)$ es el cuerpo de descomposición de $x^3 + x + 1$ y $x^3 + x^2 + 1$ sobre $\mathbb{F}_2$.

5. Decide si las siguientes extensiones son normales

$$\mathbb{Q}(\sqrt{5}i)/\mathbb{Q},\ \mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})/\mathbb{Q}.$$

6. Demuestra que $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ no es una extensión normal de $\mathbb{Q}$. Encuentra una extensión normal de $\mathbb{Q}$ que contenga a $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ como un subcuerpo.

7. Demuestra que $\mathbb{Q}(\xi)$, donde $\xi = e^{\frac{2\pi i}{5}}$, es una extensión normal de $\mathbb{Q}$.

8. Decide razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Supongamos que $f \in K[x]$ se descompone en $K[x]$, supongamos que $p \in K[x]$ no es constante y que $p \mid f$. Entonces p se descompone en $K[x]$.

b) Supongamos que $K \subseteq L \subseteq E$ son extensiones de cuerpos. Sea $f \in K[x]$ no constante. Si E es cuerpo de descomposición de f sobre K, entonces E es cuerpo de descomposición de f sobre L.

c) Si $E = K(a_1, \ldots, a_n)$ y σ es un K-automorfismo de E tal que $\sigma(a_i) = a_i$ para todo i, entonces $\sigma = 1_E$.

d) Toda extensión de grado 2 es normal.

e) Si E/L y L/K son normales, entonces E/K es normal.

f) Sea $K \subset L \subset M$ una cadena de extensiones de cuerpos tal que las extensiones $K \subset L$ y $L \subset M$ son finitas, normales y separables. Si todo automorfismo de $\mathcal{G}(L/K)$ puede extenderse a un automorfismo de M, entonces M es normal sobre K.

9. Sea $F = \mathbb{F}_2[x]/(x^2 + x + 1)$. Demuestra que $F/\mathbb{F}_2$ es separable.

10. **a)** Demuestra que $\mathbb{F}_2(x)/\mathbb{F}_2(x^2)$ no es separable.

b) Decide de manera razonada si la extensión $\left(\mathbb{F}_2(x)[t]/\langle t^2 + t + 1\rangle\right)/\mathbb{F}_2(x)$ es separable.

11. ¿Cuántas raíces distintas tiene $x^{12} + 2x^6 + 1 \in \mathbb{F}_3[x]$ en su cuerpo de descomposición?

12. Indica cuáles de los siguientes polinomios son separables sobre $\mathbb{Q}$, $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_3$, $\mathbb{F}_5$: $x^3 + 1$, $x^2 + x + 1$, $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

13. Encuentra la menor extensión normal de $\mathbb{Q}$ que contiene a $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$.

14. Encuentra el grupo de Galois de los siguientes polinomios sobre $\mathbb{Q}$ (el grupo de Galois de un polinomio $P \in K[x]$ es el grupo de Galois del cuerpo de descomposición de P sobre K):

$$x^{12} - 1,\ x^4 - 2,\ x^4 + x^2 - 6,\ (x^3 - 2)(x^2 - 2).$$

15. Si p es un primo. Halla el grupo de Galois del polinomio $f(x) = x^p - 1 \in \mathbb{Q}[x]$.

16. Demuestra que la extensión $\mathbb{C}(x)/\mathbb{C}(x^6)$ es normal y calcula su grupo de Galois.

17. Supongamos que K es un cuerpo de característica p y sea $a \in K$. Demuestra que el polinomio $p(x) = x^p - x - a$ o bien se descompone en factores lineales en $K[x]$ o bien es irreducible.

18. Sea $P(x) = x^q - x \in \mathbb{F}_p[x]$ con $q = p^n$ para $n \in \mathbb{N}$.

a) Demuestra que cualquier polinomio irreducible en $\mathbb{F}_p[x]$ de grado n divide a $P(x)$.

b) Demuestra que todos los factores irreducibles de $P(x)$ son de grado un divisor de n.

19. Sea $P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$. Halla:

a) el cuerpo de descomposición L de P sobre $\mathbb{Q}$;

b) el grupo de Galois de P (esto es, $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$);

c) el retículo de subgrupos de $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$;

d) los cuerpos intermedios entre $\mathbb{Q}$ y L, marcando los que sean extensiones normales.

20. a) Factoriza el polinomio $x^2+ax+b \in K[x]$ si K es un cuerpo de característica distinta de 2. Encuentra el retículo de subgrupos del grupo de Galois, y los subcuerpos intermedios.

b) Si $x^2 + ax + b \in \mathbb{F}_2[x]$, encuentra el retículo de subgrupos del grupo de Galois, y los subcuerpos intermedios entre $\mathbb{F}_2$ y el cuerpo de descomposición. Decide razonadamente si el cuerpo de descomposición se obtiene adjuntando una raíz cuadrada de un elemento de $\mathbb{F}_2$.

21. Responde, de manera razonada, a las siguientes preguntas:

a) Sea $P = x^3 + x + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$. Demuestra que $F = \mathbb{F}_2[x]/(P)$ es un cuerpo finito y enumera sus elementos. Halla el inverso en F del elemento $x^2 + x + 1 + (P)$. Comprueba que el grupo multiplicativo de F es cíclico.

b) Halla un generador del grupo multiplicativo K^* del cuerpo $K = \mathbb{F}_3[x]/(x^2 + 1)$ y expresa todo elemento de K^* como potencia de dicho generador.

c) Construye cuerpos finitos con 8, 9, 25 y 27 elementos.

22. Demuestra que el grupo multiplicativo $\mathbb{F}_{p^n}^*$ es cíclico.